

W. Maysenhölder

Körperschallintensitäten und -energiedichten in periodischen Medien *)

Allgemeine Formulierung

Im Rahmen der linearisierten Elastodynamik können die Energiedichte e und die Energiestromdichte \vec{S} aus der Massendichte ρ , der Geschwindigkeit \vec{v} , dem Spannungstensor $\underline{\sigma}$ und dem Verzerrungstensor $\underline{\epsilon}$ folgendermaßen berechnet werden:

$$e = \frac{1}{2} (\rho |\vec{v}|^2 + \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon}); \quad \vec{S} = - \underline{\sigma} \cdot \vec{v}. \quad (1)$$

Im folgenden werden zeitlich periodische Vorgänge betrachtet und in komplexer Schreibweise dargestellt. Das Verschiebungsfeld \vec{u} einer Mode in einem (räumlich) periodischen Medium ist nach dem Blochschen Theorem von der Form

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{p}(\vec{r}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad (2)$$

wobei $\vec{p}(\vec{r})$ die Periodizität des Mediums besitzt [1]. Ist das Medium außerdem inversionssymmetrisch, gilt für den Grenzfall tiefer Frequenzen

$$\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}_0 + ik\vec{p}_1(\vec{r}) \quad (3)$$

mit der über eine Einheitszelle gemittelten Polarisation \vec{p}_0 und dem Betrag k des (reellen) Wellenvektors \vec{k} [2]. Sowohl \vec{p}_0 als auch \vec{p}_1 sind reell. Unter diesen Voraussetzungen erhält man in normierter Schreibweise [3] für die Intensität \vec{T} , d.h. den zeitlichen Mittelwert der Energiestromdichte \vec{S} ,

$$\vec{T} = \langle \vec{S} \rangle_t = (\lambda + \mu)(\vec{e} \cdot \vec{p}_0)\vec{p}_0 + \mu |\vec{p}_0|^2 \vec{e} + \lambda(\nabla \cdot \vec{p}_1)\vec{p}_0 + \mu[(\nabla \vec{p}_1) \cdot \vec{p}_0 + \vec{p}_0 \cdot (\nabla \vec{p}_1)] \quad (4)$$

und für die zeitlich gemittelte Energiedichte

$$\langle e \rangle_t = \frac{1}{2} \{ \rho c^2 |\vec{p}_0|^2 + \lambda(\vec{e} \cdot \vec{p}_0 + \nabla \cdot \vec{p}_1)^2 + \mu [|\vec{p}_0|^2 + (\vec{e} \cdot \vec{p}_0)^2 + (\nabla \vec{p}_1 + 2\vec{e} \vec{p}_0) \cdot (\nabla \vec{p}_1 + (\nabla \vec{p}_1)')] \} \quad (5)$$

wobei $\lambda(\vec{r})$ und $\mu(\vec{r})$ die (reellen) Laméschen Konstanten und c die Phasengeschwindigkeit ω/k bezeichnen ($\vec{e} = \vec{k}/k$). Die Mittelwerte von (4) und (5) über eine Einheitszelle, $\langle \vec{T} \rangle$ und $\langle \langle e \rangle \rangle$, lassen sich als Summen über Produkte von Fourier-Koeffizienten und reziproken Gittervektoren \vec{G}_n darstellen [3]:

$$\langle \vec{T} \rangle = (\lambda_0 + \mu_0)(\vec{e} \cdot \vec{p}_0)\vec{p}_0 + \mu_0 |\vec{p}_0|^2 \vec{e} + \left\{ \sum_{n \neq 0} \lambda_n \vec{G}_n \cdot \vec{p}_n + \mu_n (\vec{G}_n \vec{p}_n + \vec{p}_n \vec{G}_n) \right\} \vec{p}_0, \quad (6)$$

$$\langle \langle e \rangle \rangle = \frac{1}{2} \{ \rho c^2 |\vec{p}_0|^2 + \mu_0 |\vec{p}_0|^2 + (\lambda_0 + \mu_0)(\vec{e} \cdot \vec{p}_0)^2 + 2 \sum_{n \neq 0} \lambda_n (\vec{e} \cdot \vec{p}_0) \vec{G}_n \cdot \vec{p}_n + \mu_n (\vec{e} \vec{p}_0) \cdot (\vec{G}_n \vec{p}_n + \vec{p}_n \vec{G}_n) + \sum_{m \neq 0 \neq n} \lambda_{m+n} (\vec{G}_m \cdot \vec{p}_m) (\vec{G}_n \cdot \vec{p}_n) + \mu_{m+n} (\vec{G}_m \vec{p}_m) \cdot (\vec{G}_n \vec{p}_n + \vec{p}_n \vec{G}_n) \}. \quad (7)$$

Zweidimensionales Beispiel

Als Beispiel diene das periodisch fortgesetzte erste Stadium des Sierpinski-Teppichs, das entsteht, wenn man aus einem homogenen, isotropen, zweidimensionalen Medium in regelmäßiger Weise quadratische Löcher herausschneidet. Die effektiven Moduln dieser Struktur wurden bereits von Sheng und Tao berechnet [4]. In **Abb. 1** sind die lokalen Intensitäten als Pfeile und die zeitlich gemittelten Energiedichten als Kreise dargestellt, und zwar ist der Radius eines inneren Kreises proportional zum kinetischen Anteil, der eines äußeren proportional zur gesamten Energiedichte. Es fällt auf, daß potentieller und kinetischer Anteil im allgemeinen verschieden groß sind, der potentielle Anteil ist an manchen Stellen sogar verschwindend gering. (Mode 1 ist vorwiegend transversal, Mode 2 vorwiegend longitudinal polarisiert.)

Abb. 2 zeigt die Intensitäten in größerer räumlicher Auflösung für drei verschiedene Ausbreitungsrichtungen (0° , 22.5° , 45°). Die Art und Weise, wie die Energie um das Loch herumfließt, ist für beide Moden durchaus verschieden. Fällt \vec{k} nicht mit einer Symmetrierichtung zusammen (22.5°), weicht die Richtung der über die Einheitszelle gemittelten Intensität $\langle \vec{T} \rangle$ von der Ausbreitungsrichtung der Welle ab, wie dies von anisotropen Medien her bekannt ist.

*) Untersuchungen gefördert durch die Gips-Schüle-Stiftung, Stuttgart

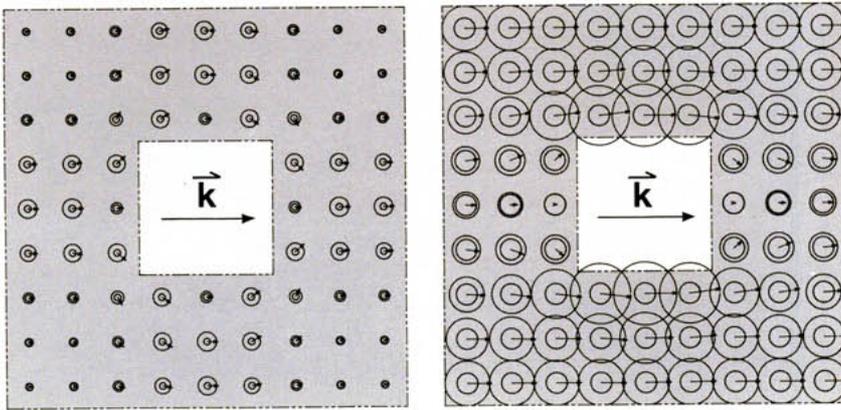


Abb. 1: Intensitäten (Pfeile) und zeitlich gemittelte Energiedichten (Kreise; Radius eines inneren Kreises \sim kinetischer Energiedichte, Radius eines äußeren Kreises \sim gesamter Energiedichte) in einer Einheitszelle der periodischen Struktur (links Mode 1, rechts Mode 2).

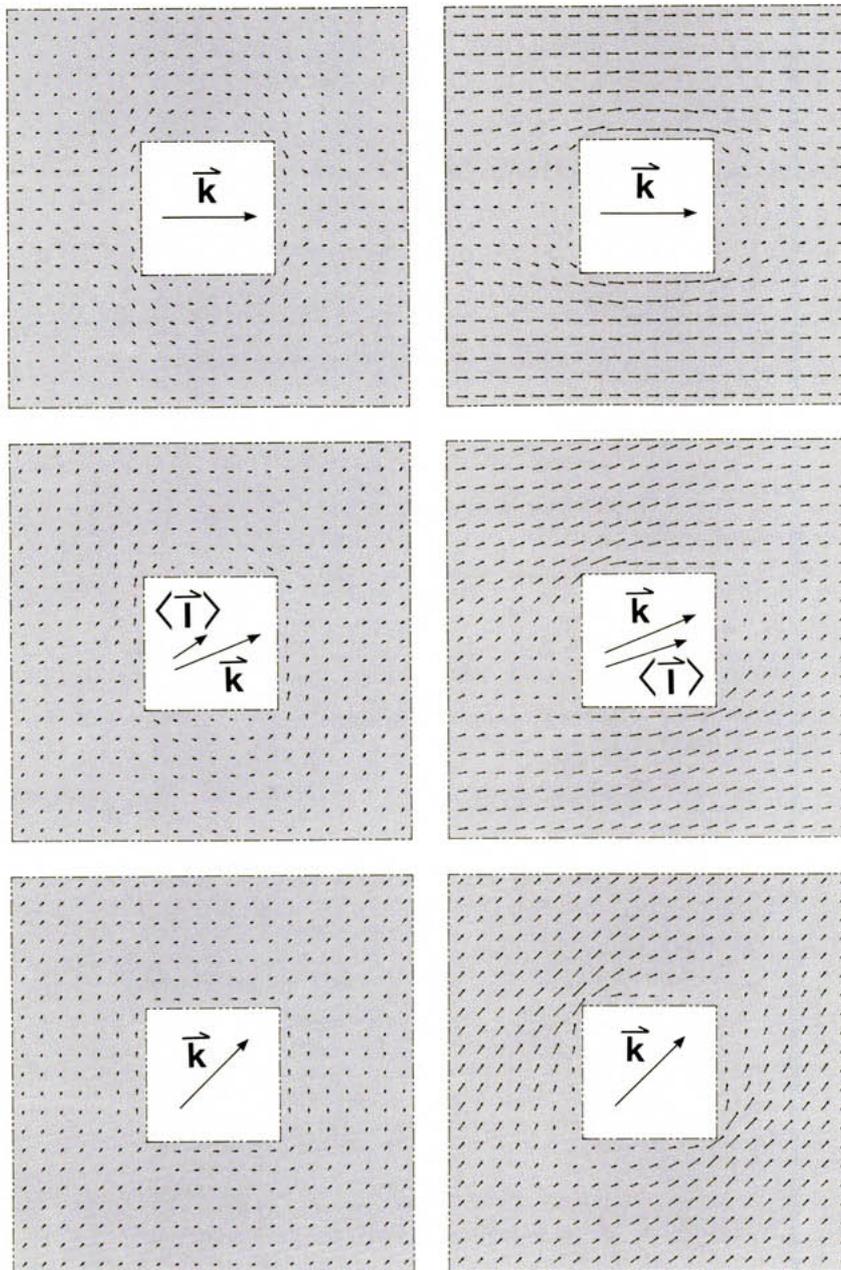


Abb. 2: Intensitäten für verschiedene Ausbreitungsrichtungen \vec{k} (0° , 22.5° , 45° ; links Mode 1, rechts Mode 2). Bei „schiefer“ Ausbreitungsrichtung (22.5°) sind \vec{k} und die mittlere Intensität $\langle \bar{T} \rangle$ nicht mehr parallel.

Literatur

- [1] Brillouin, L.
Wave Propagation in Periodic Structures. Dover Publications 1953.
- [2] Maysenhölder, W.
Theoretische Grundlagen für die Körperschallausbreitung in gemauerten Wänden I. Bericht BS 194/88 aus dem Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, 1988.
- [3] Maysenhölder, W.
Theoretische Grundlagen für die Körperschallausbreitung in gemauerten Wänden II. Bericht aus dem Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, in Vorbereitung.
- [4] Sheng, P., und Tao, R.
First-principles approach for effective-moduli calculation: Application to continuous fractal structure. Phys. Rev. B31 (1985) 6131-6133.

